기저의 변경

이차원 평면에서의 위치는 원점에서 시작하고 그 점에서 끝나는 벡터로 표시할 수 있다. 그런 경우, 그 이차원 벡터는 다음과 같이 두 기저벡터의 "일차결합"으로 표시될 수 있다.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

여기서 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 과 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$는 기저벡터이다.

그러나 이게 위치를 표현하는 유일한 방법은 아니다. 왜냐하면 다른 기저벡터를 쓸 수도 있기 때문이다. 예를 들어,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v'_x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v'_y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

즉, 다시 말해

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} \tag{3}$$

여기서 우리는 다음을 기저벡터로 쓰고 있다. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 이것은 "기저의 변경"의 한 예다. 우리는 말 그대로 기저를 바꾼 것이다. 그림 1을 봐라. 첫번째 기저에서는 우리는 다음과 같다.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

반면에 두번째 기저에서는 다음과 같다.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

두번째 기저는 벡터를 표시함에 있어서 첫번째 기저 만큼이나 알맞다. 이게 기저 변경의 정당성이다. (하지만, $\vec{A}$와 $\vec{B}$의 내적은 $A'_x B'_x + A'_y B'_y$이 아니다. 왜냐하면 x'축과 y'축이 직각으로 만나지 않기 때문이다. 물론, 내적을 보존하는 다른 기저를 이용할 수도 있다. 이 경우 x'축과 y'축은 직교한다.) 주의 깊은 독자는 우리가 이미 기저 변경을 그 전 글"고유값과 고유벡터"에서 이용한 것을 눈치챘을 것이다. 기저의 변경은 양자역학에서 아주 중요한 역할을 한다. 우리는 한 벡터가 "위치 기저," "운동량 기저," "에너지 기저"등 다른 여러 가지 기저로 쓰이는 것을 볼 것이다.

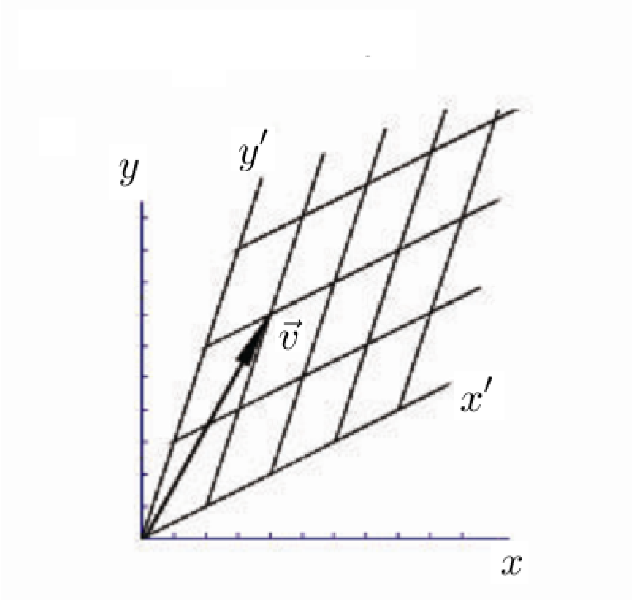

Figure 1: 기저의 변경