아인슈타인 합표시규칙

아인슈타인 합표시규칙(Einstein summation convention)은 알버트 아인슈타인(Albert Einstein)이 개발한 표기법이다. 위첨자(upper index)와 아래첨자(lower index)가 똑같은 문자로 쓰여져 있으면 그 문자가 1부터 n까지 바뀌면서 합을 해 준다는 뜻이다. 이 표기법(notation)은 아인슈타인의 일반상대성이론을 표시하는데 많이 쓰이며, 입자물리학에서도 많이 쓰인다. 이 표기법을 이용하면 행렬 계산이나 텐서 계산을 쉽게 표시할 수 있다.

일단 내적곱(dot product 혹은 inner product 혹은 scalar product)을 이 표기법을 이용하여 어떻게 쓰는지 설명하겠다.

벡터 $\vec{A}$와 벡터 $\vec{B}$의 내적곱은 $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$로 쓸 수 있을 것이다. 이 때 첫번째 성분(component)를 x, 두 번째 성분을 y, 세번째 성분을 z로 생각한다면 이것은 $\vec{A}\cdot\vec{B} = A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3$ 쓸 수 있을 것이다. 이것을 더 간단히 쓰면 $\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A^iB_i$로 쓸 수 있을 것이다.

아인슈타인 합표시규칙을 이용하면 $\vec{A}\cdot\vec{B} = A^iB_i$라고 쓸 수 있다. i가 위에 첨자와 아래 첨자에 똑같이 쓰여있으므로 i에 대해서 합을 해 준다는 말이 생략된 것이다. 여기서 이렇게 합을 해 주는 변수(variable)을 dummy variable이라고 한다. Dummy variable은 다른 문자로 바꾸어 줄 수 있다. 예를 들어 $A^iB_i = A^jB_j$이다.

행렬곱도 표현해보자. $C = AB$라고 하자. 이를 성분별로 쓰면 $C^i_k = \sum_{j=1}^{n} A^i_jB^j_k$가 된다. 이를 아인슈타인 합표기규칙을 이용하면 $C^i_k = A^i_jB^j_k$가 된다.

또한 꼭 dummy variable이 한 개야만 할 필요는 없는 것이다. 예를 들어 아인슈타인의 일반상대성 이론에서 나오는 리만 곡률(Riemann curvature)과 리만 텐서(Riemann tensor)의 관계를 써 보자.

$$R = \sum_{a=1}^{4}\sum_{b=1}^{4} g^{ab}R_{ab} = g^{ab}R_{ab}$$

이와 같이 dummy variable이 여러개 있을 수 있다. 이 때 모든 dummy variable에 대해 합을 해 주는 것이다.

연습문제 1: A와 B가 다음을 만족한다고 하자. $A^{ab} = A^{ba}$ $B_{ab} = -B_{ba}$. (이러한 A와 B는 각각 "symmetric rank 2 tensors"와 "anti-symmetric rank 2 tensors"라고 한다. 여기서, 2는 첨자의 개수를 뜻한다.) 다음을 증명해라.

$$A^{ab}B_{ab} = 0$$