

지난 글에서는 두 조건을 만족시키는 '블랙박스'를 이용해 행렬과 선형대수를 소개했다. 사실 이러한 블랙박스를 '선형 연산자'라고 한다. 이 글에서는 간단한 선형 연산자의 한 종류인 단위행렬을 소개하겠다.

입력된 숫자를 그대로 출력하는 블랙박스를 생각해보자.

예를 들어, (1, 0, 2, 3)을 입력했다면, 똑같은 숫자인 (1, 0, 2, 3)을 출력할 것이다. 이러한 선형 연산자 혹은 '블랙박스'를 '항등사상'이라고 한다. 이 조건을 항등사상 'I'를 이용해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$I(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

이젠 이 블랙박스가 선형 연산자임을 체크하자. (즉, 지난 글에 소개된 두 가지 조건을 만족해야 한다.) 첫번째 조건은 다음과 같이 쉽게 만족함을 알 수 있다.

$$I(n x_1, n x_2, n x_3, n x_4) = (n x_1, n x_2, n x_3, n x_4)$$

두번째 조건도 다음과 같이 만족한다.

$$\begin{aligned} I(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) &= (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \end{aligned}$$

그럼 다음과 같은 의문점이 생길 것이다. 이 선형사상을 어떻게 행렬로 표현할 수 있을까? 답은 다음과 같다.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

즉 대각선(왼쪽 위에서 아래 밑) 쪽에 있는 항들은 항상 1 이고, 아닌 항들은 항상 0 이다. 그럼, 단위 행렬이라고 불리는 위 행렬이 정말 항등사상인지 체크하자. 이는 아주 쉽다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

즉, 입력했던 값이 그대로 나오는 것을 확인할 수 있다.

여기서 알 수 있는 사실은 이 단위행렬은 4x4 행렬로 4 개의 숫자가 입력될 때만 작용한다는 것이다. 또한 이 행렬은 행의 개수와 열의 개수가 같다. 즉 4 이다. 이것은 입력하는 숫자의 개수와 출력되는 개수가 같기 때문에 당연한 성질이다. 다시 말해, 만약 어떤 행렬이 4 개의 숫자를 입력했지만 5 개의 숫자가 나온다면 이것은 단위행렬이 될 수 없다. 왜냐하면, 입력되지

않은 하나의 숫자를 임의로 더 출력하여야 하기 때문이다. 마찬가지로, 4 개의 숫자를 입력했는데 3 개의 숫자만 출력한다면 이 또한 역시 단위행렬이 아니다. 왜냐하면 입력된 숫자 중 하나가 출력되지 않고 사라지기 때문이다.

지금까지, 우리는, 4 개의 숫자를 입력했을 때 4 개의 숫자가 나오는 단위행렬만을 고려했다. 다시 말해, 4x4 단위 행렬만을 고려했다. 그러나 사실 4 만이 단위행렬의 크기가 될 이유는 없다. 다른 크기의 단위 행렬도 존재한다. 예를 들어, 1x1 단위 행렬, 2x2 단위 행렬, 3x3 단위 행렬은 다음과 같이 생겼다.

$$[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1x1 단위행렬은 한 숫자를 받아들이고 똑같은 숫자를 출력한다. 2x2 단위행렬은 두 숫자를 받아들이고 그대로 똑같은 두 숫자를 출력한다. 마찬가지로 nxn 단위행렬은 n 개의 숫자를 받아들이고 그대로 똑같은 n 개의 숫자를 출력한다..

이쯤 되면 nxn 단위행렬이 어떻게 생겼을까 쉽게 상상이 갈 거라고 믿는다. 대각선 방향(왼쪽 위에서 오른쪽 밑)의 항은 항상 1 이고, 나머지는 항상 0 인 행렬이다.