라그랑주 역학

17세기 말, 뉴턴은 자연을 아주 잘 기술하는 뉴턴 역학을 완성했다. 100년 쯤이 지난 후, 라그랑주는 라그랑주 역학을 만들었다. 라그랑주 역학은 뉴턴 역학과 완전히 동등하나 접근 방식이 매우 다르다. 예를 들어, 어려운 역학 문제를 풀 때, 중간 계산 과정이 많이 다르더라도 답은 같게 나오는 것은 보증되어 있으므로, 뉴턴 역학이나 라그랑주 역학 중 아무거나를 이용해 풀어도 된다. 많은 경우, 라그랑주 역학이 뉴턴 역학보다 계산이 간단하므로, 문제를 푸는 도구로서 라그랑주 역학을 배우는 것은 값어치 있는 일일 수 있다. 그러나, 더욱 중요한 것은 라그랑주의 접근 방식이 양자장론이나 일반상대성 이론의 가장 자연스러운 접근 방법이라는 것에 있다. 라그랑주 역학의 이해 없이는 이들을 이해할 수 없다. 그래서 이 글에서는 라그랑주 역학을 소개하고자 한다.

그러기 전에, 먼저 이 글을 이해하는데 아주 중요한 용어인 "극값(extremum)"과 "극값화(extremizing)"를 소개하겠다. 극값은 최대와 최소를 한꺼번에 지칭하는 단어이고, 극값화는 최대화와 최소화를 한꺼번에 지칭하는 단어다. 예를 들어, 어느 한 값이 최대나 최소이면 극값이고, 어느것이 최대화 혹은 최소화가 되면 극값화가 된 것이다. 극값의 중요한 성질은 일차미분값이 0이라는 것이다.

수학은 이정도로 하고, 이제 물리로 돌아가자. 19세기 아일랜드의 물리학자 해밀톤은 뉴턴 역학에 따라 움직이는 물체의 궤적이 "작용(action)"이라는 다음 값을 극값화한다는 사실을 발견했다.

$$S = \int_a^b L\left(q_1(t), q_2(t), \dots q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2\ (t), \dots \dot{q}_n(t)\right) dt$$

(여기서 $q_1(a),\ q_2(a),\ \dots q_n(a),\ q_1(b),\ q_2(b), \dots q_n(b)$는 값들이 고정되어 있다.)

여기서, L은 라그랑지안이고, (나중에 이것이 뭔지 정의내리겠다), t는 시간, q는 시간 이외의 좌표다. 그리고 글자 위에 있는 점은 시간에 대한 미분을 나타낸다. 괄호 안에 쓰여진 조건들은 시간이 초기 시간 a일 때, 초기 위치 $q(a)$와, 마지막 시간 b일 때 마지막 위치 $q(b)$가 고정되어 있다는 것이다. 이러한 조건을 만족하는 궤적들은 Fig. 1에 잘 나와 있다.

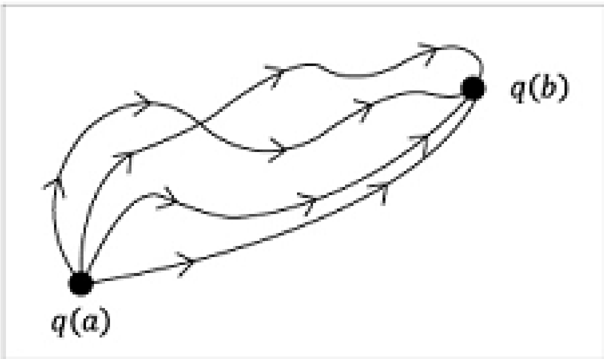

Fig.1

해밀톤이 보인 것은 이 경계조건을 만족하는 궤적 중 작용을 극값화하는 것은 뉴턴 역학으로부터 얻어낸 운동 방정식과 항상 일치한다는 것이다.

하지만, 그런 궤적을 찾는 것은 아주 어려워 보일지도 모른다. 보통 함수의 극값을 찾기 위해서는 함수를 그 함수를 기술하는 변수들에 대한 미분값이 0인 지점만 찾아주면 된다. 반면에, 우리의 경우는 그러한 변수가 무한히 많다. 왜 그런지 설명해 보겠다. S는 $q(t)$에 의존하고 여기서 t는 a와 b 사이의 아무 값이나 될 수 있다. 그러한 t가 무한히 많기 때문에 우리는 무한히 많은 변수 $q(t)$가 있다. 그래서, 그러한 궤적을 찾기 위해 무한히 많은 방정식을 풀어야 할까?

정답은 "아니오"다. 1750년대 오일러와 라그랑주는 이러한 문제들을 손쉽게 풀 수 있는 "변분법(calculus of variation)"이라는 수학을 개발했다. 그들의 방정식은 "오일러-라그랑주 방정식 (Euler-Lagrange equation)"이라 하며, 지금 유도해 보겠다.

첫째로, 작용(action)이 다음과 같이 표시 가능한다고 하자:

$$S = \int_a^b L\left(Q_i\left(t\right), \dot{Q}_i\left(t\right)\right) dt$$

여기서 i는 1부터 n까지의 값들을 가진다. 이제 $f(t)$는 경계 조건 $f\left(a\right) = f\left(b\right) = 0$을 만족하는 임의의 함수라고 하고 $Q_i^\epsilon\left(t\right)$는 궤적 $q_i(t)$와 변수 ϵ로부터 다음과 같이 표시된다고 하자:

$$Q_i^\epsilon\left(t\right) = q_i\left(t\right) + \epsilon f(t)$$

금방 말한 $f(t)$의 경계 조건은 $Q_i^\epsilon\left(a\right)$와 $Q_i^\epsilon\left(b\right)$을 고정시킨다. Fig. 2를 보아라.

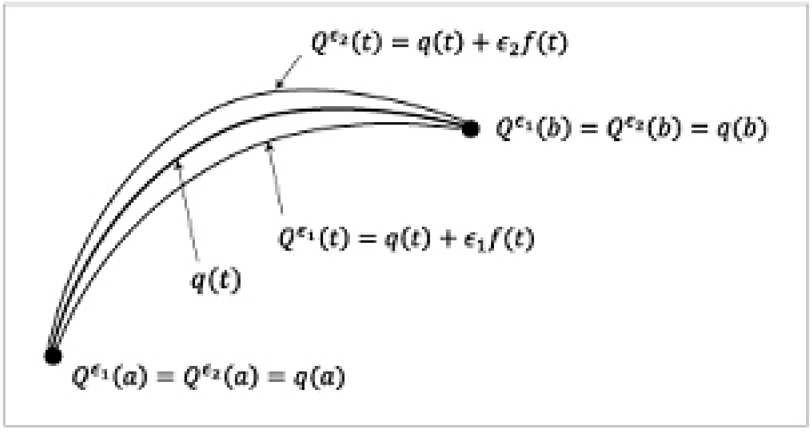

Fig.2

그에 대응하는 작용은 다음 식으로 주어진다:

$$S(\epsilon) = \int_a^b L(Q_i^\epsilon(t), \dot{Q}_i^\epsilon(t))dt \tag{1}$$

$q_i(t)$가 작용을 극값화하면, $f(t)$의 값과는 상관 없이 다음 방정식을 만족함에 주목해라.

$$\frac{dS}{d\epsilon}(\epsilon = 0) = 0$$

그 이유는 $q_i\,(t)$ 주변에 대한 아주 작은 섭동(perturbation)은 (즉 ϵ이 아주 작을 때 $\epsilon f(t)$) S가 최소면 S를 증가시키게 하고 S가 최대면 S를 감소시키게 하기 때문이다.

이제, 위 방정식을 전개해 보자:

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_a^b \frac{dL}{d\epsilon}dt = \int_a^b [f\,(t)\,\frac{\partial L\left(Q_i^\epsilon\,(t)\,, \dot{Q}_i^\epsilon\,(t)\right)}{\partial Q_i^\epsilon\,(t)} + \dot{f}(t)\frac{\partial L\left(Q_i^\epsilon\,(t)\,, \dot{Q}_i^\epsilon\,(t)\right)}{\partial \dot{Q}_i^\epsilon}]dt$$

$$= \int_a^b [f\,(t)\,\frac{\partial L}{\partial Q_i^\epsilon} - f\,(t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i^\epsilon}\right)]dt + [f(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i^\epsilon}]_a^b$$

$$= \int_a^b [\frac{\partial L}{\partial Q_i^\epsilon} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i^\epsilon}\right)]f(t)dt$$

여기서 부분적분과 $f\,(a) = f\,(b) = 0$를 이용했다. 위 식에서 ϵ이 0일 때, 임의의 아무 $f(t)$에 대해 성립하므로, 작용을 극값화하는 궤적은 다음 방정식을 만족하는 것을 알 수 있다:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

이 방정식은 “오일러-라그랑주 방정식”이라 하며 i가 1부터 n까지의 어느 값을 가질 때도 성립한다. 다시 말해, 한 시스템이 n개의 좌표로 기술되면, n개의 방정식이 있는 것이다.

라그랑주가 밝혀낸 일은 다음 라그랑지안을 오일러-라그랑주 방정식에 대입하면 뉴턴의 운동방정식이 나온다는 사실이다:

$$L = T - V$$

여기서 T는 운동 에너지이고 V는 위치 에너지이다. 여기서 라그랑지안은 운동에너지와 위치에너지의 합인 에너지의 정의와 다르다는 것에 주목해라. 라그랑지안은 운동에너지와 위치에너지의 합이 아니라 차이다.

이를 체크해보자. 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 주어진다:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = V(x, y, z)$$

이를 오일러-라그랑주 방정식에 대입하면,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}$$

정리하면, 다음과 같이 뉴턴의 운동방정식이 나온다:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

여기서 직표 좌표계를 이용해 이를 증명했지만, 극좌표계, 원통좌표계, 구면좌표계와 같은 다른 좌표계에서도 오일러-라그랑주 방정식과 뉴턴 역학의 운동방정식간의 일치는 여전히 유효하다. 이유는 다음과 같다. 어떤 좌표계를 써서 라그랑지안을 표시하더라도 그 라그랑지안에 대한 오일러-라그랑주 방정식으로부터 나오는 궤적은 작용을 극값화하는 것을 보장한다. 그러한 궤적은 어떤 좌표계를 사용하더라도 똑같은 궤적이므로, 알맞은 라그랑지안으로부터의 오일러-라그랑주 방정식은 뉴턴 역학의 운동방정식과 같다.

마지막으로, 두 코멘트를 하겠다.

첫째로, 더 개념적으로 이해하기 쉽더라도, 이 글에서 소개한 오일러-라그랑주 방정식 유도는 대부분의 교과서에서 쓰는 표기 방식을 따르지 않았다. 그래서, 여기에 다음과 같이 물리학자들이 쓰는 표기 방식을 소개했다. 유도 과정은 똑같다. 표기 방식만 다르다.

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S = \int_a^b \delta L dt &= \int_a^b [\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}]dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q dt + [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q]_a^b \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q dt
\end{aligned}
$$

여기서 그 전처럼 다음 조건을 사용했다: $\delta q\,(t=a) = \delta q\,(t=b) = 0$. 이 방정식이 임의의 아무 δq에 대해 성립해야 하므로, 우리는 오일러-라그랑주 방정식을 얻는다.

둘째로, 라그랑지안의 전미분 (total derivative)항은 운동방정식에 아무런 기여도 할 수 없다. 다시 말해, 라그랑지안 L에 대한 오일러-라그랑주 방정식과 라그랑지안 $L + \frac{dF}{dt}$에 대한 오일러-라그랑주 방정식은 같다. 이를 후자의 라그랑지안에 대한 오일러-라그랑주 방정식 유도를 다시 따라가며 유도해보자:

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S = \int_a^b [\delta L + \delta \dot{F}]dt &= \int_a^b \delta L \; dt + [\delta F]_a^b \\
&= \int_a^b \delta L \; dt + [\frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}]_a^b \\
&= \int_a^b \delta L \; dt
\end{aligned}
$$

여기서 $t = a$일 때와 $t = b$일 때 δq와 $\delta \dot{q}$가 0인 것을 이용했다. (물론 δq가 0일 때 $\delta \dot{q}$는 0이다.)

위의 식들을 보면, 라그랑지안 $L + \frac{dF}{dt}$에 대한 오일러-라그랑주 방정식을 구하는 일은 결국 라그랑지안 L에 대한 오일러-라그랑주 방정식을 구하는 일이다. 그래서, 전미분 항은 오일러-라그랑주 방정식에 아무런 기여하지 않으며, 두 가지 경우의 오일러-라그랑주 방정식은 같다고 결론 내릴 수 있다.