

예비 이공계 대학생을 위한 테일러 전개

테일러 전개는 고등학교 미적분에서 다루지 않고, 대학교 1학년 미적분에서 다루나, 고등학교 미적분을 아는 사람이라면 그다지 어렵지 않다.

테일러 전개는 함수를 무한다항식으로 나타내는 것이다.

다음 상황을 보자.

y 가 x 에 충분히 가까우면, $f(y)$ 는 $f(x) + f'(x)(y-x)$ 로 근사할 수 있을 것이다. 더 자세히 근사하는 방법은 없을까?

이런 이유로 $f(y)$ 를 다음과 같이 써보자.

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + A_2(y-x)^2 + A_3(y-x)^3 + A_4(y-x)^4 \cdots \quad (1)$$

A_2, A_3, A_4 를 구할 수 있다면 이것은 더 나은 근사가 될 것이다.

(1)을 미분하자. 그럼,

$$f'(y) = 1 \cdot f'(x) + 2 \cdot A_2(y-x) + 3 \cdot A_3(y-x)^2 + 4 \cdot A_4(y-x)^3 \cdots \quad (2)$$

다시 미분하면,

$$f''(y) = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3(y-x) + 4 \cdot 3 \cdot A_4(y-x)^2 \cdots \quad (3)$$

위 식이 y 가 x 근방일 때 성립하여야 하므로, $y = x$ 를 대입해보자.

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 0 + 0 + 0 \cdots = 2 \cdot 1 \cdot A_2 \quad (4)$$

고로 우리는 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$A_2 = f''(x)/2! \quad (5)$$

(3)을 다시 미분하면:

$$f'''(y) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot A_4(y-x) \cdots \quad (6)$$

$y = x$ 를 다시 대입하면:

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_3 \quad (7)$$

를 얻는다.

고로:

$$A_3 = f'''(x)/3! \quad (8)$$

(6)을 미분하고 다시 $y = x$ 를 대입하면:

$$A_4 = f''''(x)/4! \quad (9)$$

이것을 더 큰 자연수 n 에 대한 A_n 에 대해서도 쉽게 일반화할 수 있을 것이다.

이렇게 구한 A_2, A_3, A_4 를 (1)에 대입해 주면:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2!}(y-x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(y-x)^3 + \frac{f''''(x)}{4!}(y-x)^4 + \cdots \quad (10)$$

를 얻는다

물론 여기서 가정한 것이 있다. 바로 우변이 수렴한다는 것이다. 우변이 수렴하는데 필요조건은 다음과 같다. (충분조건은 아니다)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n!}(y-x)^n = 0 \quad (11)$$

여기서 $f^{(n)}(x)$ 는 $f(x)$ 를 n 번 미분했다는 뜻이다.

즉 더해 주는 항이 계속 0에 근접해 가지 않으면 절대로 수렴할 수 없는 것이다.

다음은 몇몇 함수들의 테일러 전개이다. 어렵지 않으니 직접 계산해서 확인해 볼 것을 권한다. 즉 (10)에서 y 에 x 를 대입하고 x 에 0을 대입하면 된다. 여기서 $\mathcal{O}(x^n)$ 는 x^n 나 이보다 높은 차항의 항들을 의미한다.

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + \mathcal{O}(x^6) \quad (12)$$

(모든 x 에 대해 수렴)

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 + \mathcal{O}(x^7) \quad (13)$$

($-1 < x \leq 1$ 에 대해 수렴)

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - x^{11}/11! + \mathcal{O}(x^{13}) \quad (14)$$

(모든 x 에 대해 수렴)

테일러 전개가 어떻게 작동하는지를 알기 위해 Fig.1과 Fig.2를 보라. Fig.1은 싸인 함수의 테일러 전개의 다섯번째 항까지의 합이고 Fig.2는 싸인 함수의 테일러 전개의 아홉번째 항까지의 합이다. 이 두 그래프를 싸인 함수의 그래프인 Fig.3과 비교해 보라. 테일러 전개에서 항을 더 더해줄 수록 그래프가 원래 함수인 싸인 함수와 더욱 비슷해지는 것을 볼 수 있다. 게다가 테일러 전개를 $x = 0$ 근방에서 했기 때문에 (즉, (10)에 $x = 0$ 을 대입했기 때문에) x 가 0 근방일 때 테일러 전개에 의한 근사가 가장 정확하다는 것을 알 수 있다.

연습문제 1. $\cos x$ 를 x^{10} 차항까지 테일러 전개해라. ($\sin x$ 를 잘 전개할 수 있었다면, 이 문제는 어렵지 않을 것이다.)

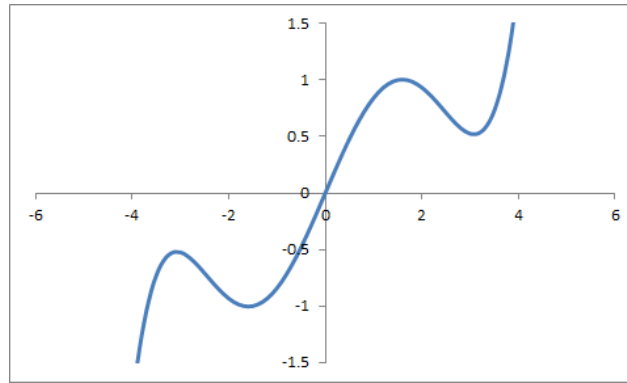


Figure 1: $x - x^3/3! + x^5/5!$

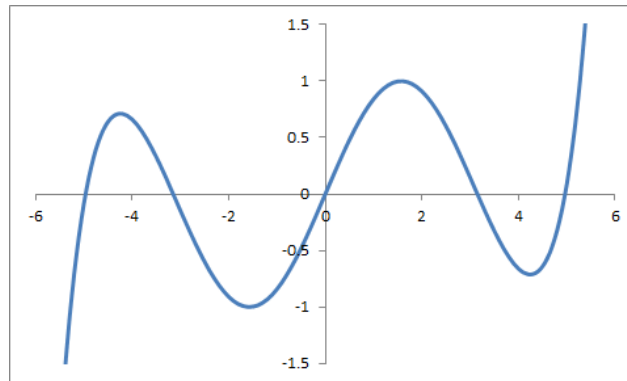


Figure 2: $x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9!$

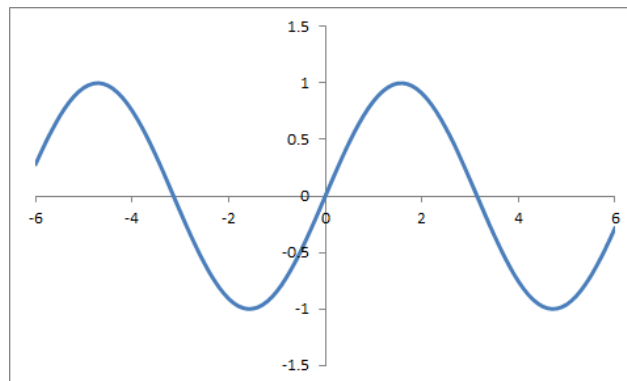


Figure 3: $\sin x$

연습문제 2. 다음 식의 테일러 전개를 v^2 차항까지 하라.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (15)$$

(힌트: 이항정리를 이용하라. (이항정리가 무엇인지 알기 위해서는 “The imagination in mathematics: ‘Pascal’s triangle, combination, and the Taylor series for square root’”를 읽어라.)
나중에 상대론적 운동에너지가 v 가 c 보다 훨씬 작을 때 비상대론적 운동에너지가 됨을 보일 때
이 문제의 답을 쓸 것이다.)