미분 형식, 벡터 미적분, 일반화된 스토크스의 정리

벡터 미적분을 표현하는 방법에는 두 가지가 있다. 첫째는 좌표계를 이용하는 것이고 두번째는 좌표계를 이용하지 않고 벡터 표기를 이용하는 것이다. 예를 들어 첫번째 방법을 이용하면 두 벡터의 내적은 아인슈타인 합표시 규칙을 이용해 $v^i w_i$로 표시될 수 있다. 반면에 두번째 방법을 이용하면 같은 것은 $\vec{v} \cdot \vec{w}$로 표현이 가능하다. 어떤 방면에서는 좌표계를 이용하지 않는 표현법이 이용하는 표현법보다 더 직관적이기 때문에 더 낫다는 것을 알 수 있다. 첨자들이 너무 많으면 직관력을 잃지 않겠는가. 반면에 좌표계를 이용하는 편이 실제 계산을 할 때에는 더 유리하다.

그레이디언트(gradient), 회전(curl), 발산(divergence)도 이 두 가지 방식으로 표현할 수 있다는 것을 잘 알려진 사실이다. 하지만, 벡터 미적분에서 성분(component) 없이 표현하는 방법은 3차원이 넘어가면 문제에 직면한다. 미분 형식은 고차원에서의 식들을 더 간결히, 성분 표시 없이 표현할 수 있게 해준다. 게다가 스토크스의 정리를 어느 차원에서도 표현할 수 있게 해주며 맥스웰 방정식의 기원을 확실히 이해할 수 있게 해준다. 그래서 공부해 볼 가치가 있다. 이 글에서는 일반화된 스토크스의 정리를 쓸 수 있을 정도로 미분 형식을 설명해 보고자 한다. Ryder가 쓴 *Quantum Field Theory*의 69-76 페이지도 미분 형식을 이해하기 쉽게 설명한다.

수학적으로 이야기하자면, 미분 형식이란 고차원 면(hypersurface)에서 적분되어질 때 숫자를 주는 것이다. 예를 들어 n차 미분 형식(n-form)이란 n차원 면에서 적분되어질 때 숫자를 주는 것이다.

1차 미분 형식(1-form)은 1차원 선에서 적분되어질 때 숫자가 나온다. 예를 들어 1차 미분 형식 w은 다음과 같이 나타내어진다:

$$w = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz. \tag{1}$$

이것은 다음과 같이 w가 1차원 선에 적분되어질 수 있으므로 말이 된다:

$$\int_s w = \int_s f dx + g dy + h dz \tag{2}$$

여기서 s는 1차원 경로를 의미한다.

그럼, 2차 미분 형식이란 무엇일까? 2차 미분 형식 u는 다음과 같이 주어진다고 추측할 수 있을 것이다:

$$u = a(x, y, z)dxdy + b(x, y, z)dydz + c(x, y, z)dzdx. \tag{3}$$

2차 미분 형식은 2차원 면에서 적분되어져 숫자를 주므로 위 식은 거의 맞다고 할 수 있다. 2차원 면은 2차원이므로 적분을 두 번 해줘야 하므로 d가 붙은 변수가 두 개(즉, dx와 dy처럼)이다. 그러나, 말했듯이, 위 식은 거의 맞지만 완벽히 맞지는 않다. 고차원 미분 형식을 표현하기 위해서는 한 가지 더 중요한 요소가 있기 때문이다. dx와 dy 사이에 $\wedge$를 넣어 주어야

한다. (이것이 올바른 좌표 변환을 준다는 것을 곧 보게돼 이것이 꼭 필요하다는 것을 알게 될 것이다.) 예를 들어, 위의 u는 다음과 같이 다시 정의되어야 한다:

$$u = a(x,y,z)dx \wedge dy + b(x,y,z)dy \wedge dz + c(x,y,z)dz \wedge dx. \tag{4}$$

$\wedge$는 쐐기곱(wedge product)이라 하며 다음과 같은 성질이 있다: $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$. 이로부터 나오는 성질은 똑같은 것을 다시 쐐기곱해주면 0이라는 것이다. ($v \wedge v = -v \wedge v \rightarrow v \wedge v = 0$). $dx \wedge dy$와 같은 것은 적분식에서 $dxdy$와 같이 작용한다고 생각하면 좋다.

쐐기곱은 또한 적분되어지는 면의 방향(orientation)에 관한 정보를 담고 있다. 이를 보이기 위해 먼저 벡터 미적분에서의 선속(flux) 적분이 면에 대해 적분되어지는 것을 주목하라. 적분되어지는 면이 클 수록 답이 더 크다($\int \vec{v} \cdot d\vec{A}$). 3차원에서서는 선속 적분이 벡터장 $\vec{v}$와 면 $\vec{A}$의 수직 벡터(normal vector)와 내적을 취해줌으로써 적분이 행해진다는 것도 주목해라. 이 때 면에 대해 두 수직 벡터 중에 하나를 선택할 수 있다. 예를 들어 만약 면이 $z = 0$로 주어지면, 두 수직 벡터는 $\hat{z}$와 $-\hat{z}$가 된다. 수직 벡터를 둘 중 다른 것을 선택하면 적분은 같은 크기의 값이 나오지만 부호가 반대다. $\hat{z}$를 선택하는 것은 면적분에서 $dx \wedge dy$를 선택하는 것과 같고 $-\hat{z}$를 선택하는 것은 $-dx \wedge dy$와 같은 $dy \wedge dx$를 선택하는 것과 같다. 그래서, 쐐기곱의 반대칭적(anti-symmetric) 성질은 적분되어지는 면의 방향(즉, 수직 벡터)을 고를 수 있는 자유를 반영한다.

쐐기곱은 분배법칙을 따른다. 예를 들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(fdx + gdy) \wedge (hdx + idy) &= fhdx \wedge dx + ghdy \wedge dx + fidx \wedge dy + gidy \wedge dy \\ &= (fi - gh)dx \wedge dy \end{aligned} \tag{5}$$

(5)는 두 벡터 (f, g)와 (h, i)로 이루어진 평행사변형의 정확한 면적소(area element)를 주는 것을 알 수 있다. 그래서, 쐐기곱의 사용은 적분 변수를 바꿔줄 때 알맞은 야코비안을 준다. 예를 들어, $da = fdx + gdy$이고 $db = hdx + idy$라면 $f = \frac{\partial a}{\partial x}$, $g = \frac{\partial a}{\partial y}$, $h = \frac{\partial b}{\partial x}$, $i = \frac{\partial b}{\partial y}$이고 다음을 얻는다.

$$\int da \wedge db = \int (fi - gh)dx \wedge dy \tag{6}$$

쐐기곱을 사용하지 않았다면 정확한 면적소가 아닌 $\int (fi + gh)dxdy + (fh)dxdx + (gi)dydy$가 되었을 것이다.

이 글에서는 엄밀한 수학적 정당화나 증명 없이 쐐기곱을 이용할 것이다. 위의 예처럼 쐐기곱이 벡터 미적분에서 유도되는 식들을 정확히 주기 때문이다.

다른 예를 들자면, 부피소(volume element) 3차 미분 형식이 좌표변환에 의해 어떻게 바뀌는지 보자. 3차 미분 형식 t를 다음과 같이 정의하자: $t = dx \wedge dy \wedge dz$. 그래서 이것은 부피소다. 이제, 좌표를 (x', y', z')로 변환하자. 그럼, 다음과 같다:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial x'}dx' + \frac{\partial x}{\partial y'}dy' + \frac{\partial x}{\partial z'}dz' \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x'}dx' + \frac{\partial y}{\partial y'}dy' + \frac{\partial y}{\partial z'}dz' \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x'}dx' + \frac{\partial z}{\partial y'}dy' + \frac{\partial z}{\partial z'}dz' \end{aligned}$$

이제 $dx' \wedge dy' \wedge dz' = dy' \wedge dz' \wedge dx' = dz' \wedge dx' \wedge dy' = -dy' \wedge dx' \wedge dz' = -dz' \wedge dy' \wedge dx' = -dx' \wedge dz' \wedge dy'$라는 점에 주의해 새 좌표계에서 t를 표현해 주면 다음을 얻는다:

$$t = dx \wedge dy \wedge dz = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix} dx' \wedge dy' \wedge dz' \tag{7}$$

즉, 쐐기곱의 반대칭적 성질은 적분변수를 바꿔줄 때 올바른 야코비안을 준다.

이제 우리는 그레이디언트, 회전, 발산의 일반화인 외미분(exterior derivative) 'd'를 소개하기 위한 모든 준비를 끝냈다. k차 미분 형식의 외미분은 $(k+1)$차 미분 형식이다. 예를 들어, (dx나 dy가 없는) 0차 미분 형식의 외미분은 1차 미분 형식이다. 이를 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \tag{8}$$

여기서 A는 0차 미분 형식이다. 놀랍게도 이것은 그레이디언트다. 내적이 그렇듯이 외미분은 좌표계로부터 독립적인 양임을 알 수 있다. 예를 들어, 위 식은 다른 좌표계에서 다음과 같이 표현될 수 있다:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x'} dx' + \frac{\partial A}{\partial y'} dy' + \frac{\partial A}{\partial z'} dz' \tag{9}$$

이는 (8)과 같은 벡터이지만 단순히 다른 좌표계에서 표현된 것이다.

일반적인 n차 미분 형식에 대한 외미분의 값은 다음 규칙을 이용해 얻을 수 있다:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} (\alpha \wedge d\beta) \tag{10}$$

여기서 $\deg \alpha$는 α의 차수(degree)이다. n차 미분 형식의 차수는 n으로 정의 된다. $(-1)^{\deg \alpha}$항은 쐐기곱의 반대칭적 성질 때문에 존재한다.

게다가 외미분은 $d^2 = 0$이란 성질을 만족한다. 이로부터 알 수 있는 것은 dx의 외미분이 0이라는 것이다. 다시 말해 $d(dx) = 0$이다. 마찬가지로 $d(dy) = d(dz) = 0$이다.

이제, 1차 미분 형식의 외미분이 어떻게 되는지 보자. α를 $\alpha = V_x dx + V_y dy + V_z dz$로 주어지는 1차 미분 형식이라 하자. 그럼 다음을 얻는다:

$$d\alpha = dV_x dx + V_x d(dx) + dV_y dy + V_y d(dy) + dV_z dz + Vzd(dz) = dV_x dx + dV_y dy + dV_z dz \tag{11}$$

여기서 V_x, V_y, V_z가 0차 미분 형식이므로 (8)를 이용해 dV_x, dV_y, dV_z에 대입을 해주면 된다. 그럼,

$$\begin{aligned} d\alpha &= (\frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz) \wedge dx + (\frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \frac{\partial V_y}{\partial z} dz) \wedge dy \\ &+ (\frac{\partial V_z}{\partial x} dx + \frac{\partial V_z}{\partial y} dy + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz) \wedge dz \\ &= (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}) dy \wedge dz + (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}) dz \wedge dx + (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}) dx \wedge dy \end{aligned}$$

가 된다. 만일 벡터를 $U = U_x dy \wedge dz + U_y dz \wedge dx + U_z dx \wedge dy$로 정의해주면, 놀랍게도 $\nabla \times \vec{\alpha} = \vec{U}$를 얻는다.

마찬가지로, 2차 미분 형식의 외미분이 어떻게 되는지 보자. $U = U_x dy \wedge dz + U_y dz \wedge dx + U_z dx \wedge dy$라 하자. 그럼, 다음을 얻는다:

$$
\begin{aligned}
dU &= \frac{\partial U_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial U_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial U_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= (\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}
\tag{12}
$$

이것은 발산이다.

정리하자면, 0차 미분 형식의 외미분은 그레이디언트고, 1차 미분 형식의 경우는 회전이며, 2차 미분 형식의 경우는 발산이다. 이제 왜 d^2이 0인지 보자. 이유는 편미분이 교환가능하기 때문이다. 다시 말해, n차 미분 형식의 d^2를 계산할 때 꼭 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy$와 같은 항들이 나오는데 이는 항상 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx$와 같은 항들에 의해 상쇄된다.

d^2=0는 그레이디언트의 회전이 0이고 회전의 발산이 0임을 의미한다. 게다가, 발산 정리(divergence theorem)나 그린 정리(Green's theorem)은 어느 차원에서나 성립하는 스토크스 정리로 다음과 같이 일반화될 수 있다: $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$. 여기서 ∂S는 n차원 면 S의 경계이고 $d\omega$는 $(n-1)$차 미분 형식 ω의 외미분이다. ω가 0차 미분 형식이고 S가 1차원 선일 때 다음과 같이 미적분학의 기본 정리(fundamental theorem of calculus)를 얻는다: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. 여기서 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$이다. ω가 1차 미분 형식이고 S가 2차원 면일 때에는 그린 정리를 얻고 ω가 2차 미분 형식이고 S가 3차원 물체일 때 발산 정리를 얻는다. 다음 글에서는 맥스웰의 방정식을 미분 형식을 이용해 표현하겠다. 개인적으로 대학교 1학년 때 고급수학 시간에 이 문제를 숙제로 만난 후 맥스웰 방정식이 미분 형식을 사용하면 아주 간단해 지는 것에 매료돼 간단한 '모든 것의 이론'이 존재한다는 확신을 갖게 되었다.