

고유값과 고유벡터

다음을 계산해야 한다고 하자.

$$A^{10}x = y \quad (1)$$

여기서 A 는 2×2 행렬이고 x 는 2×1 행렬이다. 예를 들어 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 면 계산하고자 하는 것은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

한 가지 분명한 것은 행렬 곱셈은 복잡하여 위 계산은 쉽지 않을 것이라는 것이다. 더 쉽게 계산 하는 방법이 있을까? 있다. 고유값과 고유벡터라는 개념을 이용하면 된다. 이것이 이 글에서 다룰 주제다. 여기서 강조하고 싶은 것은, 이 두 가지 개념은 단순한 계산도구가 아니라, 더욱 심오하며 근본적인 의미를 갖는다는 것이다. 과학과 공학에 아주 널리 쓰인다.

이제 원래 문제로 돌아가자. 다음을 만족시키는 두 개의 2×1 행렬 e_1 과 e_2 를 찾았다고 하자.

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \lambda_1 e_1 \\ Ae_2 &= \lambda_2 e_2 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 λ_1 과 λ_2 는 숫자이다.

그럼 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned} A^{10}e_1 &= A^9(Ae_1) = A^9\lambda_1 e_1 = \lambda_1 A^9 e_1 \\ &= \lambda_1 A^8(Ae_1) = \lambda_1^2 A^8 e_1 \end{aligned} \quad (4)$$

이 과정을 반복하면, 다음을 얻는다.

$$A^{10}e_1 = \lambda_1^{10} e_1 \quad (5)$$

마찬가지로,

$$A^{10}e_2 = \lambda_2^{10} e_2 \quad (6)$$

그래서 만약 식(1)에 있는 x 가 e_1 혹은 e_2 라면 계산은 아주 단순해졌다. 대응되는 λ 를 구하고 그것의 10승을 계산한 다음, 그것을 x 에 곱해 주면 된다. 하지만, 사실 x 가 e_1 이나 e_2 가 아니더라도 비슷한 요령을 쓸 수가 있다. x 가 e_1 과 e_2 의 합으로 다음과 같이 표현될 수 있다고 하자.

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 \quad (7)$$

여기서 c_1 과 c_2 는 숫자다.

그럼 다음을 얻는다.

$$A^{10}x = A^{10}(c_1 e_1 + c_2 e_2) = A^{10}c_1 e_1 + A^{10}c_2 e_2 = c_1(\lambda_1)^{10}e_1 + c_2(\lambda_2)^{10}e_2 \quad (8)$$

이게 답이다.

우리가 필요로 했던 계산 과정이 무엇이었는지 다시 생각해 보자. (1)을 계산하기 위해 (3)을 만족하는 e_1 과 e_2 를 찾아야 했다. 그리고 나서 (7)를 만족하는 c_1 과 c_2 를 찾아야 했다. 이게 수순이었다. 즉, 다시 말하자면, 모든 계산이 (3)을 만족하는 e_1 과 e_2 만 찾고 x 를 이것들로 표시하면 되는 거였다. e_1 과 e_2 는 고유벡터라고 하고 λ_1 과 λ_2 는 고유값(혹은 고유치)이라고 한다.

지금까지 이야기는 너무 추상적이었기에 구체적인 예를 하나 들어 계산해 보자. 식(2)의 예를 보겠다. 첫째로, 고유벡터와 고유값을 찾아보자. e_1 과 e_2 를 다음과 같이 표기하자. $e_i = \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix}$ (i 는 1 혹은 2). 그럼

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

성분별로 분석하면

$$\begin{aligned} v_i + 2w_i &= \lambda_i v_i \\ -v_i + 4w_i &= \lambda_i w_i \end{aligned}$$

다시 말해,

$$(1 - \lambda_i)v_i = -2w_i \quad (10)$$

$$-v_i = (\lambda_i - 4)w_i \quad (11)$$

즉

$$(1 - \lambda_i)(\lambda_i - 4) = -2 \times -1$$

이차방정식을 풀면

$$\lambda_i = 2, 3 \quad (12)$$

편의상 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ 라고 하자 ($\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ 도 가능하지만). (10)에 대입하면, 다음을 얻는다:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

물론 우리는 e_1 을 $(2, 1)$ 대신 $(4, 2)$ 혹은 $(6, 3)$ 을 뽑았어도 됐었고, e_2 를 $(1, 1)$ 대신 $(-1, -1)$ 나 $(2, 2)$ 를 뽑았어도 됐었다. 하지만, 이런 다른 값들을 뽑아도 일관성 있게만 계산해 준다면 최종 답은 바뀌지 않는다.

(7)에 (2)의 예를 대입하면:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$1 = 2c_1 + c_2$$

$$0 = c_1 + c_2$$

$c_1 = 1, c_2 = -1$ 를 얻는다.

그리고 다음과 같이 계산을 끝낼 수 있다:

$$A^{10}x = A^{10}(e_1 - e_2) = 2^{10}e_1 - 3^{10}e_2 = \begin{pmatrix} 2^{10} \times 2 - 3^{10} \times 1 \\ 2^{10} \times 1 - 3^{10} \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57001 \\ -58025 \end{pmatrix}$$

고유벡터의 크기(“노름(norm)”)를 1로 맞춰주는 것은 물리에서 많은 경우 편리하다. 우리의 경우 e_1 과 e_2 는 그런 조건을 만족하지 않는다. 그렇지만, 어떠한 고유벡터로부터, 우린 항상 크기가 1인 고유벡터를 만들 수 있다. 이 과정을 “정규화(normalization)”라고 한다. 이것은 간단하다. 고유벡터를 그것의 원래 크기로 나누어주기만 하면 된다. 그럼, 새 고유벡터는 크기가 1이 되고, 원래와 같은 고유값을 가진 고유벡터가 된다. 예를 들어, 우리의 경우, e_1 은 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 의 크기를 가지므로, 새 고유벡터를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$(2/\sqrt{5})^2 + (1/\sqrt{5})^2 = 1$ 이기 때문에 노름은 1이며, 이것은 다음과 같은 이유로 여전히 고유값이 3인 고유벡터이다.

$$Ae'_1 = A(e_1/\sqrt{5}) = (Ae_1)/\sqrt{5} = 3e_1/\sqrt{5} = 3(e_1/\sqrt{5}) = 3e'_1 \quad (16)$$

비슷하게, 두번째 정규화된 고유벡터로 다음을 얻는다.

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

일반적으로, $n \times n$ 행렬은 n 개의 고유벡터를 갖는다. 예를 들어, 4×4 행렬 A 가 있을 때 다음 식을 만족하는 네 개의 λ 와 (즉, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) 네 개의 e 가 (즉, e_1, e_2, e_3, e_4) 존재한다.

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1$$

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2$$

$$Ae_3 = \lambda_3 e_3$$

$$Ae_4 = \lambda_4 e_4$$

고유값과 고유벡터의 성분은 해당 행렬의 각 성분이 실수(real number)라도 복소수가 되는 경우도 있다. 또한, 일반적으로 이 n 개의 고유벡터는 n 차원 벡터 공간의 기저를 이루며, 임의의 n 차원 벡터는 고유벡터들의 선형결합(linear combination)으로 유일하게 표현될 수 있다.

나중에 “고유값과 고유벡터 구하기”에서는 행렬의 크기가 2×2 보다 클 때 어떻게 고유값과 고유벡터를 구할 수 있는지 설명하겠다. 거기서, 왜 $n \times n$ 행렬이 일반적으로 n 개의 고유값과 n 개의 고유벡터를 갖는지 배우게 될 것이다.

연습문제 1. 단위행렬의 고유값은 얼마인가? 그 어떠한 벡터도 단위행렬의 고유벡터임을 보여라. 이 사실은 나중에 “뉴트리노 진동, 제대로 설명하기”에서 왜 뉴트리노 진동이 뉴트리노의 세 질량 모두가 같지는 않다는 것을 보여줄 때 써먹을 수 있을 것이다.

연습문제 2. 왜 고유값과 고유벡터는 정사각행렬(square matrix, 행과 열의 개수가 같은 행렬)에 대해서만 정의될 수 있는지 설명해라.