이 글에서는 역행렬에 대해 설명하겠다. 이를 위해 행렬이 뭔지 정의하겠다. `*i* x *j*' 행렬은 *j*개의 숫자를 입력하면 *i*개의 숫자를 출력하는 선형 연산자이다. 그럼, 다음과 같은 질문이 떠오를지도 모르겠다. 주어진 행렬이 있을 때, 출력된 값을 알고 있다면, 입력한 값도 알 수 있을까?

2x2 행렬 *A*가 있을 때 이 문제를 풀어보자. *A*가 다음과 같이 표기된다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

이건 2x2 행렬이므로, 두 숫자 `$x_1$,$x_2$'를 입력하면 다음과 같이 두 숫자 `y_1,y_2'가 출력될 것이다.

$$AX = Y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

여기서 우린 입력되는 두 숫자를 행렬 *X* 로 표기했고, 출력되는 두 숫자를 행렬 *Y*로 표기했다.

위 등식을 풀어 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2$$

즉, 우리가 풀고자 하는 문제는 y_1과 y_2를 알 때 x_1 과 x_2를 구하는 것이다. 사실 이건 쉬운 연립 방정식이다.

이 방정식을 풀면 다음의 해를 얻는다.

$$x_1 = (a_{22}y_1 - a_{12}y_2)/(\det\ A)$$
$$x_2 = (-a_{21}y_1 + a_{11}y_2)/(\det\ A)$$

여기서 다음과 같은 표기를 이용했다.

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

이는 행렬 *A*의 '행렬식'이라고 한다.

행렬로 표시하면 위 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X = A^{-1}Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

여기서 우리는 다음과 같은 표기법을 썼다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

이는 *A*의 '역행렬'이라고 한다. 그럼 이것이 왜 A^{-1}로 표기되는지 설명하겠다.
a, *b*, *c* 가 다음을 만족하는 세 수라고 하자.:

$$\mathrm{ab} = \mathrm{c}$$

그럼 *b* 와 *c* 로 어떻게 *a* 를 표시할 수 있을까?
그건 단순히 다음과 같다.

$$\mathrm{a} = b^{-1}c$$

여기서 $b^{-1} * \mathrm{b} = 1$이다.

그래서 우린 역행렬을 왜 그렇게 표기하는지 이해할 수 있다.

자, 이제 그럼 역행렬의 몇 가지 성질들을 살펴보자. 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$AX = Y = AA^{-1}Y$$

사실 이는 어떤 행렬 *Y* 에 대해서도 성립하므로, 다음과 같이 결론지을 수 있다.

$$AA^{-1} = I$$

여기서 I 는 저번 글에서 정의된 단위행렬이다. 다시 말해 AA^{-1}는 입력된 숫자를 그대로 똑 같은 숫자로 출력하므로 이는 단위행렬이어야만 한다. 또한 다음 사항을 고려해 보자. 만약 위 수식의 양변에 *A* 를 곱하면 다음을 얻는다.:

$$AA^{-1}A = I\mathrm{A} = \mathrm{A}$$
$$A(A^{-1}A) = \mathrm{A}$$

위 등식은 어느 *A*에 대해서도 성립한다. 즉, 결론은 다음과 같다:

$$A^{-1}A = I$$

사실 임의의 2x2행렬의 역행렬이 위 두 가지 성질을 만족한다는 것은 다음과 같이 쉽게 확인할 수 있다:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = I$$

역행렬은 정사각행렬이면 det A가 0이 아닌 이상 정의될 수 있다. 여기서 정사각행렬이란 행의 개수와 열의 개수가 같은 행렬을 말한다. (즉 *i* x *j* 행렬인데 *i*=*j*인 경우) 정사각행렬이 아닌 경우는 약간 미묘하다. *i* x *j* 행렬의 역행렬이란 *i* 개의 방정식이 있을 때 *j* 개의 미지수를 구하는 것이다. *j* 가 *i*, 보다 크면 미지수를 완전하게는 결정하지 못한다. 즉, 하나의 역행렬이 아닌 여러 개의 역행

렬이 이 경우 존재하는 것이다. 반대로 i 가 j 보다 큰 경우 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 많다. 즉, 일반적인 경우를 고려하자면, 해가 존재하지 않는다. 즉, 역행렬이 존재하지 않는다.

정사각행렬이라고 하여도 det A가 0이면 역행렬이 존재하지 않는다. 왜냐하면 0으로 나눠줄 수 없기 때문이다. 이런 경우, 무한히 많은 해가 존재하거나 아예 해가 존재하지 않는다. 예를 들어 다음 행렬의 행렬식은 0이다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

왜냐하면 2x6-3x4=0 이기 때문이다.

이 경우에 해당하는 연립방정식은 다음과 같다.

$$2x_1 + 3x_2 = y_1$$
$$4x_1 + 6x_2 = y_2$$

그래서 만약 $y_2 = 2y_1$ 이면 무한히 많은 해가 존재한다. 이 조건이 만족되지 않은 경우에는, 해가 아예 없다..

역행렬이 있는 행렬은 가역행렬이라고 한다. 행렬은 행렬값이 0이 아니면, 또 아닌 경우만, 가역행렬이다. 이 글에서는 2x2보다 큰 정사각행렬의 행렬값을 고려하지는 않았지만, 방금 말했던 이 가역행렬의 조건은 어느 크기의 정사각행렬이든지 성립한다. 후의 글들에서 행렬값에 대해 더 자세히 설명하겠다.

연습문제 1.
다음을 증명하라.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$