전치와 에르미트 연산자

전치는 행렬에서 중요한 연산자이다. 행렬의 성분들을 다음과 같이 표시해주면, 행렬 A의 전치는 다음과 같이 정의된다.

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \tag{1}$$

다시 말하자면, 전치란 행과 열을 서로 맞바꿔 주는 것이다. 여기 한 예가 있다.

만약 A가 다음과 같이 주어진다면:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

다음을 얻는다:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{3}$$

전치의 유용한 성질 중 하나는 다음과 같다:

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{4}$$

이것은 다음과 같이 쉽게 증명될 수 있다.

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk}B_{ki} = \sum_k (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij} \tag{5}$$

대칭행렬은 자기 자신이 전치인 행렬이다. 즉,

$$M^T = M \tag{6}$$

여기 한 예가 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

여기서 알 수 있듯이, 대칭행렬은 행의 개수와 열의 개수가 같다. 즉, 항상 정사각행렬이다.

양자역학에서는, 전치보다는 에르미트 연산자가 더 유용하다. 에르미트 연산자는 다음의 식으로 정의되어진다.

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} \tag{8}$$

여기서 * 란 복소켤레를 의미한다. 전치와 마찬가지로, 다음을 쉽게 알 수 있다.

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{9}$$

만약 에르미트 연산자를 가한 행렬이 원래의 행렬과 같다면, 그 행렬은 에르미트 행렬이라고 한다. 여기 에르미트 행렬의 한 예가 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-3i \\ 1-i & 3 & 4 \\ 2+3i & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

대각 방향(왼쪽 위에서 오른쪽 아래)의 값이 항상 실수임을 확인하자. 이건 다음을 고려할 때 당연한 결과다

$$A^*_{kk} = A_{kk} \tag{11}$$

(정의로부터 에르미트 행렬은 $A_{ij} = A^*_{ji}$가 성립한다. 여기서 i와 j에 k를 대입하라.)

연습문제 1.
다음을 증명해라:

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \tag{12}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A \tag{13}$$

$$(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger \tag{14}$$

$$(cA)^\dagger = c^* A^\dagger \tag{15}$$

연습문제 2.
D가 임의의 정사각행렬일 때 $D + D^\dagger$가 항상 에르미트 행렬임을 증명해라. (힌트: (12)와 (13)를 이용해라.)

연습문제 3.
행렬 E는 $E = -E^\dagger$가 성립할 때 반에르미트 행렬이라고 한다. F가 임의의 정사각행렬일 때 $F - F^\dagger$가 반에르미트 행렬임을 증명해라.

연습문제 4.
G가 에르미트 행렬이면 iG가 반에르미트 행렬임을 보여라. (힌트: (15)를 이용하라.)

연습문제 5.
임의의 정사각행렬은 H는 에르미트 행렬과 반에르미트 행렬의 합으로 표시될 수 있음을 보여라.

연습문제 6.
임의의 정사각행렬 J에 대해 $JJ^\dagger$가 항상 에르미트 행렬임을 보여라.(힌트: (9)와 (13)를 이용해라.)

연습문제 7.
행렬 U는 $UU^\dagger = I$를 만족하면 "유니타리 행렬"이라고 한다. H가 에르미트 행렬일 때 e^{iH}이 유니타리 행렬임을 증명해라. (지수 함수 위에 행렬이 올라가는 것이 이상할지도 모르지만, 이는 테일러 전개로 다음과 같이 정의될 수 있다.)

$$e^{iH} = 1 + (iH) + \frac{(iH)^2}{2!} + \frac{(iH)^3}{3!} + \frac{(iH)^4}{4!} + \cdots \tag{16}$$

(힌트: $(e^{iH})^\dagger = 1 + (-iH) + \frac{(-iH)^2}{2!} + \cdots$ 임을 보이고 아무 숫자 c에 대해 성립하는 다음 전개를 이용해라.)

$$e^c e^{-c} = \left(1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + (-c) + \frac{(-c)^2}{2!} + \frac{(-c)^3}{3!} + \cdots\right) = 1 \tag{17}$$